

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 15 Απριλίου 2026
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 99.
A2. Σελίδα 142 σχολικού βιβλίου .
A3. Σελίδα 143 σχολικού βιβλίου σχόλιο.
A4. (α)Λάθος (β)Σωστό (γ)Σωστό (δ)Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$$\mathbf{B1.} A_{g \circ f} = \left\{ x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g \right\} = \left\{ x > 1 \text{ και } \frac{x+1}{x-1} > 0 \right\} = \left\{ x > 1 \text{ και } x < -1 \text{ ή } x > 1 \right\}$$

$$\text{Διότι : } \frac{x+1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

$$\text{Άρα } A_{g \circ f} = (1, +\infty) \text{ και } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\mathbf{B2.} \text{ Έχουμε την συνάρτηση } \varphi(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), x > 1$$

$$\text{η οποία ισοδύναμα γράφεται } \varphi(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$$

Η φ παραγωγίσιμη στο $A = (1, +\infty)$ με

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x-1}{x^2-1} = -\frac{2}{x^2-1} < 0 \text{ για κάθε } x > 1 \text{ άρα η } \varphi(x) \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της .}$$

Η φ συνεχής στο $A = (1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα άρα το σύνολο τιμών της είναι

$$\varphi(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \right) = (0, +\infty) \text{ διότι:}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

- Για το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$, θέτουμε $u = \frac{x+1}{x-1}$, για $x > 1$

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$$

- Για το $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$, θέτουμε $u = \frac{x+1}{x-1}$, για $x > 1$

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} u = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) \cdot \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

B3. (i) Η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = (1, +\infty)$ οπότε και 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της φ^{-1} είναι το σύνολο τιμών της φ άρα $A_{\varphi^{-1}} = \varphi(A) = (0, +\infty)$

Άρα $\varphi(x) = y$ με $x \in (1, +\infty)$ και $y \in (0, +\infty)$

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = e^y \Leftrightarrow x+1 = x \cdot e^y - e^y \Leftrightarrow 1+e^y = x e^y - x$$

$$\Leftrightarrow 1+e^y = x(e^y - 1) \Leftrightarrow x = \frac{e^y + 1}{e^y - 1}, \text{ άρα } \varphi^{-1}(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x > 0$$

(ii) Η $\varphi^{-1}(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ είναι συνεχής στο $A_{\varphi^{-1}} = (0, +\infty)$

Κατακόρυφη Ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 1) \cdot \frac{1}{e^x - 1} = +\infty \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) = 0 \text{ και } e^x - 1 > 0 \text{ καθώς } x \rightarrow 0^+ \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της φ^{-1}

Οριζόντια Ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \underset{D.L.H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \text{ άρα η ευθεία με εξίσωση } y = 1 \text{ είναι οριζόντια}$$

ασύμπτωτη της φ^{-1} στο $+\infty$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026
Β' ΦΑΣΗ
E_3.Μλ3ΘΟ(α)

B4. Η συνάρτηση $g(x) = \ln x$ έχει ρίζα το 1 και το πρόσημό της φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	0	1	$+\infty$
f(x)		-	+

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E &= \int_1^e |g(x)| dx = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e (x)' \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx = [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = [x \ln x - x]_1^e = (e \ln e - e) - (\ln 1 - 1) = 1 \text{ τ.μ} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το σημείο $A(0, f(0))$ ανήκει στην $y = -x - 2$ άρα $f(0) = -2 \Leftrightarrow -\beta = -2 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 2}$

Η κλίση της εφαπτομένης είναι ίση με την παράγωγο της f στο $x=0$ επομένως $f'(0) = -1$

Παραγωγίζοντας την f παίρνουμε $f'(x) = x^2 + \alpha e^x + \alpha x e^x - \beta e^x$

$$f'(0) = -1 \Leftrightarrow \alpha - \beta = -1 \Leftrightarrow \alpha - 2 = -1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ έχουμε $\boxed{f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x e^x - 2e^x}$

Γ2.

(i) Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = x^2 + e^x + x e^x - 2e^x = x^2 + x e^x - e^x$$

$$f''(x) = 2x + e^x + x e^x - e^x = 2x + x e^x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 + e^x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ αφού } 2 + e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } f''(x) > 0 \Leftrightarrow x(2 + e^x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''(x)	-	0	+
f(x)	↖		↗

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, κυρτή στο $[0, +\infty)$ και το σημείο $A(0, f(0))$ ή $A(0, -2)$ είναι το σημείο καμπής της.

(ii) Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται

$$x^3 + 3x + 6 < 6e^x - 3xe^x \Leftrightarrow x^3 + 3xe^x - 6e^x < -3x - 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 + xe^x - 2e^x < -x - 2 \Leftrightarrow f(x) < -x - 2$$

Η εφαπτομένη της f στο σημείο A είναι η ευθεία με εξίσωση $y = -x - 2$

Γνωρίζουμε ότι, αν μια συνάρτηση είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "πάνω" (αντιστοίχως "κάτω") από την γραφική παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους

Η ανίσωση $f(x) + x + 2 < 0 \Leftrightarrow f(x) < -x - 2$

Άρα θέλουμε η γραφική παράσταση της f να είναι κάτω από την εφαπτομένης της στο σημείο $A(0, f(0))$, αυτό συμβαίνει στο διάστημα που η f είναι κοίλη άρα

$$f(x) < -x - 2 \Leftrightarrow x < 0$$

Γ3. Ισχύει ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ (αφού η f κοίλη) και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [0, +\infty)$ (αφού η f κυρτή)

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f'

$$f'(\Delta_1) = [f'(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)] = [-2, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + xe^x - e^x) = +\infty \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$$

Το $0 \in f'(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (-\infty, 0)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$, το x_1 μοναδικό διότι η f' γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 άρα και 1-1

$$f'(\Delta_2) = [f'(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)] = [-2, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + xe^x - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{x^2}{e^x} + x - 1 \right) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

Διότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

Το $0 \in f'(\Delta_2)$ άρα υπάρχει $x_2 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 0$, το x_2 μοναδικό διότι η f' γνησίως αύξουσα στο Δ_2 άρα και 1-1

Από τα διαστήματα μονοτονίας της f' και τις ρίζες της ,θα βρούμε το πρόσημό της

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$f'(x)$					

Έστω $x \in (-\infty, x_1)$ τότε $x < x_1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Έστω $x \in (x_1, 0)$ τότε $x_1 < x < 0 \Leftrightarrow f'(x_1) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Έστω $x \in (0, x_2)$ τότε $0 < x < x_2 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Έστω $x \in (x_2, +\infty)$ τότε $x_2 < x \Leftrightarrow f'(x_2) < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Άρα το πρόσημο της f' και τα διαστήματα μονοτονίας της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$					

Άρα η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο .

Γ4.

$$\bullet \int_{x_1}^0 xf''(x)dx = \left[xf'(x) \right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 f'(x)dx = -x_1 f'(x_1) - \left[f(x) \right]_{x_1}^0 = -f(0) + f(x_1) = 2 + f(x_1) > 0$$

Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $x_1 < 0 < x_2$

$$x_1 < 0 \Leftrightarrow f(x_1) > f(0) \Leftrightarrow f(x_1) > -2 \Leftrightarrow \boxed{f(x_1) + 2 > 0}$$

$$\bullet \int_0^{x_2} xf''(x)dx = \left[xf'(x) \right]_0^{x_2} - \int_0^{x_2} f'(x)dx = x_2 f'(x_2) - \left[f(x) \right]_0^{x_2} = -f(x_2) + f(0) = -f(x_2) - 2 > 0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

$$x_2 > 0 \Leftrightarrow f(x_2) < f(0) \Leftrightarrow f(x_2) < -2 \Leftrightarrow -f(x_2) - 2 > 0$$

$$\text{Άρα } \left(\int_{x_1}^0 xf''(x)dx \right) \cdot \left(\int_0^{x_2} xf''(x)dx \right) > 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ με $f'(x) = e^x + xe^x + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x \in A$

Άρα η f γνησίως αύξουσα στο A

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xe^x + \ln x) = -\infty$$

Για $x < 1$ ισχύει λόγω μονοτονίας ότι $f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < e$

Επομένως στο $\Delta = (0, 1)$ το $f(\Delta) = (-\infty, e)$, ο αριθμός 0 ανήκει σε αυτό άρα υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, το x_0 είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και 1-1. Δηλαδή $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow x = x_0$

Δ2. $f''(x) = 2e^x + xe^x - \frac{1}{x^2}$ (δε μπορούμε να βρούμε το πρόσημό της)

$f'''(x) = 3e^x + xe^x + \frac{2}{x^3} > 0$ για κάθε $x \in A$ επομένως η f'' είναι γνησίως αύξουσα

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της.

Η f'' συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$ άρα

$$f''(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} f''(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

$$\text{Διότι: } \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2e^x + xe^x - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2e^x + xe^x - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

Ο αριθμός $0 \in f''(A)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f''(x_1) = 0$, το x_1 μοναδικό διότι η f'' γνησίως αύξουσα άρα και 1-1

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > f''(x_1) \Leftrightarrow x > x_1$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < f''(x_1) \Leftrightarrow 0 < x < x_1$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

x	0	x_1	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+
$f(x)$	↪		↻

Η f κοίλη στο $(0, x_1]$ και κυρτή στο $[x_2, +\infty)$. Το σημείο $A(x_1, f(x_1))$ είναι σημείο καμπής.

Δ3.

(i) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $e^{x_0} + 2 \ln x_0 > 0$ (1)

$$\text{Αφού το } x_0 \text{ είναι ρίζα της } f \text{ ισχύει } f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 e^{x_0} + \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ln x_0 = -x_0 e^{x_0}} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) έχουμε

$$e^{x_0} - 2x_0 e^{x_0} > 0 \Leftrightarrow e^{x_0} (1 - 2x_0) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2x_0 > 0 \Leftrightarrow x_0 < \frac{1}{2}$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\boxed{x_0 < \frac{1}{2}}$

$$\text{Αν } x_0 = \frac{1}{2} \text{ τότε } \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 0 \text{ άτοπο λόγω της υπόθεσης}$$

$$\text{Από τη σχέση } \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx = \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \neq 0 \text{ προκύπτει ότι } f(x) > 0 \text{ στο διάστημα } \left[x_0, \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{ή στο } \left[\frac{1}{2}, x_0 \right]$$

$$\text{Αν } x_0 > \frac{1}{2} \text{ τότε } \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx = - \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} |f(x)| dx = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(x) dx \text{ άρα}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(x) dx = \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(x) dx - \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(x) dx = 0 \Leftrightarrow 2 \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(x) dx = 0$$

Επίσης άτοπο άρα $x_0 < \frac{1}{2}$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

Β. Τρόπος

$$x_1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow f''(x_1) < f''\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{e} + \frac{1}{2}\sqrt{e} - 4 \Leftrightarrow 0 < \frac{4\sqrt{e} + \sqrt{e} - 8}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{5\sqrt{e} - 8}{2}$$

$$5\sqrt{e} > 8 \Leftrightarrow 25e > 64 \text{ το οποίο ισχύει αν θεωρήσουμε } e \approx 2,71$$

$$\text{Το οποίο ισχύει και επειδή } x_0 < x_1 \text{ άρα } x_0 < \frac{1}{2}$$

(αν κάποιος χρησιμοποιήσει αυτόν τον τρόπο το δεδομένο με το ολοκλήρωμα είναι περιττό, αλλά κρίναμε ότι αυτός ο τρόπος λύσης είναι δύσκολο να το σκεφτεί μαθητής αλλά και να το σκεφτεί προφανώς θα καταλάβει ότι είναι περιττό)

(ii) για το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x_1) - F(x_0)}{(2x_0)^x}$ έχουμε ότι στο διάστημα $[x_0, x_1]$ η f είναι μη αρνητική

αφού είναι γνησίως αύξουσα και

$$x_0 < x < x_1 \Leftrightarrow f(x_0) < f(x) < f(x_1) \Leftrightarrow 0 < f(x) < f(x_1)$$

Η παράγουσα F της f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, x_1]$ επομένως $F(x_1) - F(x_0) > 0$

$$\text{Επίσης } x_0 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x_0 < 1 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x_0)^x = 0 \text{ (} \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0 \text{ όταν } 0 < \alpha < 1 \text{)}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2x_0)^x} = +\infty \text{ αφού } (2x_0)^x > 0$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x_1) - F(x_0)}{(2x_0)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((F(x_1) - F(x_0)) \cdot \frac{1}{(2x_0)^x} \right) = (+\infty)$$

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x < x_0$ ισχύει: $f(x) < (x - x_0) \cdot f'(x_1)$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την f στο διάστημα $[x, x_0]$ με $x > 0$

Υπάρχει $\kappa \in (x, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\kappa) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \Leftrightarrow f'(\kappa) = \frac{-f(x)}{x_0 - x} \Leftrightarrow f'(\kappa) = \frac{f(x)}{x - x_0}$$

$\kappa < x_1$ και η f' στο διάστημα $[\kappa, x_1]$ είναι γνησίως φθίνουσα αφού η f κοίλη άρα

$$f'(\kappa) > f'(x_1) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x - x_0} > f'(x_1) \Leftrightarrow f(x) > f'(x_1) \cdot (x - x_0)$$