

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 15 Απριλίου 2026
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη εξίσωσης κύκλου, σχολικό βιβλίο, σελίδες 81-82.

A2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 23.

A3. α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Ο συντελεστής του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι:

$$\lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - (\lambda + 1)}{\lambda - (-1)} = \frac{3 - \lambda}{\lambda + 1}$$

οπότε

$$\frac{3 - \lambda}{\lambda + 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 9 - 3\lambda = \lambda + 1 \Leftrightarrow 8 = 4\lambda \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 2$$

B2. i) Η (ε_1) αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y = \lambda \cdot x$ και αφού διέρχεται και από το $B(2,4)$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{4-0}{2-0} = 2$ οπότε

$$(\varepsilon_1): y = 2x$$

ii) Έχουμε $(\delta): x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -x - 2$ άρα $\lambda_\delta = -1$ και αφού

$(\varepsilon_1) // (\delta)$ θα είναι $\lambda_{\varepsilon_2} = -1$.

Επειδή η (ε_2) διέρχεται από το $(0,3)$ θα έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_2): y = -1 \cdot x + 3 \Leftrightarrow (\varepsilon_2): \boxed{y = -x + 3}$$

B3. i) Για το σημείο τομής Γ :

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ άρα } \Gamma(1,2).$$

ii) Οι $(\varepsilon_2), (\delta)$ είναι παράλληλες και το $\Gamma(1,2)$ είναι σημείο της (ε_2) άρα η απόσταση των $(\varepsilon_2), (\delta)$ είναι ίση με την απόσταση του Γ από την (δ) δηλαδή

$$d(\varepsilon_2, \delta) = \delta(\Gamma, \delta) = \frac{|1 + 2 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

iii) Έχουμε $A(-1,3), B(2,4), \Gamma(1,2)$ άρα

$$\overrightarrow{AB} = (2 + 1, 4 - 3) = (3, 1)$$

$$\overrightarrow{AG} = (1 + 1, 2 - 3) = (2, -1)$$

Αν $\hat{\varphi} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$ ισχύει $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AG}| \cdot \sin \varphi$ όπου

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}, \quad |\overrightarrow{AG}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

οπότε

$$5 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin \varphi \Leftrightarrow \sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα $\boxed{\varphi = 45^\circ}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Για την εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - 28 = 0$ (1) έχουμε

$$A = 4, B = 0, \Gamma = -28 \text{ οπότε}$$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 + 0 + 112 = 128 > 0 \text{ άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο}$$

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (-2, 0)$$

και ακτίνα

$$r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{128}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

- ii) Αφού $x > 0$ θα είναι και $p > 0$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση της εστίας απέχει από το $O(0,0)$ είναι $\left|\frac{p}{2}\right| = \frac{p}{2}$ όπως και η απόσταση της διευθετούσας (δ) από το $O(0,0)$ είναι $\left|-\frac{p}{2}\right| = \frac{p}{2}$. Άρα

$$\frac{p}{2} + \frac{p}{2} = 4 \Leftrightarrow p = 4.$$

Οπότε $C_1: y^2 = 8x$.

Γ2. Για τα σημεία τομής παραβολής και κύκλου λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y^2 = 8x & (1) \\ x^2 + y^2 + 4x - 28 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Η (2)} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x^2 + 8x + 4x - 28 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$\Delta = 144 + 112 = 256$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm 16}{2} \begin{cases} 2 \\ -14 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

Άρα $x = 2$ οπότε $(1) \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$. Άρα τέμνονται στα σημεία $M_1(2,4)$ και $M_2(2,-4)$.

Γ3. Εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ σε σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι $yy_1 = p(x + x_1)$ οπότε για την $y^2 = 8x$ είναι στο σημείο

$$M_1(2,4): y \cdot 4 = 4(x + 2) \Leftrightarrow \varepsilon_1: \boxed{y = x + 2}$$

$$\text{Στο σημείο } M_2(2,-4): y \cdot (-4) = 4(x + 2) \Leftrightarrow \varepsilon_2: \boxed{y = -x - 2}$$

Επειδή $\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$ οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται κάθετα και για το σημείο τομής τους ισχύει:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases} \text{ άρα τέμνονται στο σημείο } K(-2,0)$$

που είναι το κέντρο του κύκλου.

Γ4. Είναι $\varepsilon_2: y = -x - 2 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$.

Η διευθετούσα της παραβολής είναι $\delta: x = -\frac{p}{2} = -2$

Έστω $\Delta = (-2, y_\Delta)$ σημείο της διευθετούσας.

Θέλουμε

$$d(\Delta, \varepsilon_2) = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|-2 + y_\Delta + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|y_\Delta|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$|y_\Delta| = 8 \Leftrightarrow y_\Delta = 8 \quad \text{ή} \quad y_\Delta = -8.$$

Άρα $\Delta_1(-2,8)$ και $\Delta_2(-2,-8)$ ζητούμενα σημεία.

ΘΕΜΑ Α

Δ1. Έστω $E'(x, 0)$ και $E(-x, 0)$ με $x < 0$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $E'KE$ είναι

$$(E'KE) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{E'K} \\ \overrightarrow{EK} \end{pmatrix} \right| \text{ όπου } K(0, \lambda) \text{ και}$$

$$\overrightarrow{E'K} = (0 - x, \lambda - 0) = (-x, \lambda), \quad \overrightarrow{EK} = (0 + x, \lambda - 0) = (x, \lambda) \text{ οπότε}$$

$$(E'KE) = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -x & \lambda \\ x & \lambda \end{vmatrix} \right| \Leftrightarrow 4|\lambda| = \frac{1}{2} |-x\lambda - x\lambda| \Leftrightarrow 8|\lambda| = 2|-x\lambda| \Leftrightarrow$$

$$8|\lambda| = 2|x| \cdot |\lambda| \Leftrightarrow |x| = 4$$

και αφού $x < 0 \Rightarrow x = -4$. Άρα $E'(-4, 0)$ και $E(4, 0)$.

Δ2. i) Ο κύκλος με διάμετρο $E'E$ έχει κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα 4 άρα η εξίσωση του είναι $C: x^2 + y^2 = 16$.

ii) Αν $M(x_1, y_1)$ σημείο του κύκλου C , η εφαπτομένη σε αυτό έχει εξίσωση

$$xx_1 + yy_1 = 16 \quad (1)$$

(Αν $y_1 = 0$ η εφαπτομένη θα είναι της μορφής $x = \kappa$ άρα όχι παράλληλη της $y = -x$).

$$\text{Έτσι για } y_1 \neq 0 \text{ η (1): } yy_1 = -x_1 \cdot x + 16 \Leftrightarrow y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{16}{y_1}$$

και αφού είναι παράλληλη στην $y = -x$ θα έχουμε

$$-\frac{x_1}{y_1} = -1 \Leftrightarrow x_1 = y_1.$$

Όμως για το σημείο $M(x_1, y_1)$ του κύκλου ισχύει :

$$x_1^2 + y_1^2 = 16 \Leftrightarrow x_1^2 + x_1^2 = 16 \Leftrightarrow 2x_1^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 = 8 \Leftrightarrow x_1 = \pm 2\sqrt{2}.$$

Άρα $M_1(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ και $M_2(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

Οι εξισώσεις εφαπτομένων θα είναι:

$$\text{στο } M_1: x \cdot 2\sqrt{2} + y \cdot 2\sqrt{2} = 16 \Leftrightarrow x + y = \frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x + y = 4\sqrt{2}} \text{ και}$$

$$\text{στο } M_2: x(-2\sqrt{2}) + y(-2\sqrt{2}) = 16 \Leftrightarrow$$

$$x + y = -\frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{x + y = -4\sqrt{2}}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

Δ3. i) $K(0, \lambda), \lambda \neq 0$

Έστω ρ η ακτίνα των κύκλων τότε :

$$(x - 0)^2 + (y - \lambda)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - \lambda)^2 = \rho^2 \text{ όπου}$$

$\rho = (KE) = (KE')$. Με $E(4, 0)$ είναι

$$\rho = \sqrt{(0 - 4)^2 + (0 - \lambda)^2} = \sqrt{16 + \lambda^2}$$

Άρα οι κύκλοι με κέντρο K που διέρχονται από τα E, E' έχουν εξίσωση

$$x^2 + (y - \lambda)^2 = 16 + \lambda^2$$

ii) Το κέντρο $K(0, \lambda)$ των κύκλων βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x = 0$ η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $(n): y = -8$. Άρα η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι

$$\rho = d(K, n) = \frac{|\lambda + 8|}{1} = |\lambda + 8|.$$

Αλλά $\rho = \sqrt{16 + \lambda^2}$ οπότε

$$\sqrt{16 + \lambda^2} = |\lambda + 8| \Leftrightarrow 16 + \lambda^2 = (\lambda + 8)^2 \Leftrightarrow$$

$$16 + \lambda^2 = \lambda^2 + 16\lambda + 64 \Leftrightarrow 16\lambda = -48 \Leftrightarrow \lambda = -3.$$

Άρα ο ζητούμενος κύκλος είναι ο $C_1: x^2 + (y + 3)^2 = 25$.