

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 15 Απριλίου 2026
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ είναι : $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Μονάδες 10

Α2. Τι ονομάζουμε γραμμικό συνδυασμό δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.

β) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ ισχύει πάντα $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$.

γ) Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τις $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ όπου } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

δ) Για κάθε τιμή των $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία

ε) Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία $A(-1, \lambda + 1)$ και $B(\lambda, 4)$ με $\lambda \neq -1$.

B1. Αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{1}{3}$, να βρείτε το λ .

Μονάδες 5

Για $\lambda = 2$:

B2. i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο B.

Μονάδες 4

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) που είναι παράλληλη της ευθείας $(\delta): x + y + 2 = 0$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3.

Μονάδες 4

B3. Αν $(\varepsilon_1): y = 2x$, $(\varepsilon_2): y = -x + 3$ και Γ το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) , τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\Gamma(1,2)$.

Μονάδες 3

ii) Να βρείτε την απόσταση των ευθειών (ε_2) και (δ) .

Μονάδες 4

iii) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραβολή $C_1: y^2 = 2px$, $x > 0$ της οποίας η απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα της είναι ίση με 4, καθώς και η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + 4x - 28 = 0 \quad (1).$$

Γ1. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-2,0)$ και ακτίνα $r = 4\sqrt{2}$.

Μονάδες 4

ii) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής.

Μονάδες 5

Αν $C_1: y^2 = 8x$

Γ2. Να βρείτε τα σημεία τομής του κύκλου και της παραβολής.

Μονάδες 4

Γ3. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής στα κοινά της σημεία με τον κύκλο τέμνονται κάθετα στο κέντρο του κύκλου.

Μονάδες 6

Γ4. Αν (ε_2) η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $(2, -4)$, να βρείτε τα σημεία της διευθετούσας δ της παραβολής των οποίων η απόσταση από την ευθεία (ε_2) είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα σημεία $K(0, \lambda)$, $\lambda \neq 0$ και τα σημεία E' , E όπου E' σημείο του αρνητικού ημιάξονα Ox' και E το συμμετρικό του E' ως προς τον άξονα $y'y$.

Δ1. Αν το εμβαδόν του τριγώνου $E'KE$ είναι ίσο με $4|\lambda|$, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων E' και E .

Μονάδες 5

Δ2. i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C με διάμετρο την $E'E$.

Μονάδες 4

ii) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = -x$.

Μονάδες 6

Δ3. i) Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλους τους κύκλους που διέρχονται από τα E' και E και έχουν κέντρο το K .

Μονάδες 4

ii) Από τους παραπάνω κύκλους να βρείτε τον κύκλο C_1 ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $(\eta): y = -8$.

Μονάδες 6