

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025  
Α΄ ΦΑΣΗ

Ε\_3.Μλ3Θ0(α)

**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2025  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σελίδα 76 σχολικού βιβλίου (Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών)
- A2.** Σελίδα 95 σχολικού βιβλίου (ΟΡΙΣΜΟΣ)
- A3.** Ο ισχυρισμός (γ) είναι λάθος
- A4.** (α) Σωστό (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Λάθος (ε) Λάθος

## ΘΕΜΑ Β

- B1.**  $A_{h \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_h\}$   
 $A_{h \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x \leq 1\}$   
 $A_{h \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x \leq 0\}$   
Άρα  $A_{h \circ g} = (-\infty, 0]$  και  $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \sqrt{1 - e^x}$
- B2.**  $f(x) = \sqrt{1 - e^x}, x \leq 0$   
Έστω  $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$  με  $x_1 < x_2$  τότε

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2} \Leftrightarrow 1 - e^{x_1} > 1 - e^{x_2} \Leftrightarrow \sqrt{1 - e^{x_1}} > \sqrt{1 - e^{x_2}} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $A = (-\infty, 0]$  και συνεχής άρα το σύνολο τιμών της είναι  $f(A) = [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [0, 1)$

$$\text{Διότι } f(0) = \sqrt{1 - e^0} = \sqrt{1 - 1} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - e^x} = 1 \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) = 1 - 0 = 1$$

**B3.** Η  $f$  είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1 επομένως αντιστρέφεται .

Το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$  είναι το σύνολο τιμών της  $f$  . Άρα  $A_{f^{-1}} = f(A) = [0, 1)$

Για την εύρεση της  $f^{-1}$  θα λύσουμε την εξίσωση  $f(x) = y$  ως προς  $x$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{1 - e^x} = y \Leftrightarrow 1 - e^x = y^2 \Leftrightarrow 1 - y^2 = e^x \Leftrightarrow x = \ln(1 - y^2)$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \ln(1 - x^2), x \in [0, 1)$$

**B4.** Για το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ e^x \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{e^x}\right) \right]$  έχουμε

$$\left| e^x \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{e^x}\right) \right| = |e^x| \cdot \left| \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{e^x}\right) \right| \leq |e^x| \cdot 1$$

$$\text{Άρα } \left| e^x \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{e^x}\right) \right| \leq |e^x|$$

$$\text{Επομένως } -|e^x| \leq e^x \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{e^x}\right) \leq |e^x| \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{e^x}\right) \leq e^x$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$  άρα από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{e^x}\right) = 0$$

## ΘΕΜΑ Γ

$$\begin{aligned}\Gamma 1. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h) - f(x) + f(x)}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right] \quad (\text{I})\end{aligned}$$

$$\text{Ισχύει } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\text{ενώ για το } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h}$$

Θέτουμε  $u = -h$  άρα  $h = -u$ , όταν  $h \rightarrow 0$  τότε  $u \rightarrow 0$  οπότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x+u) - f(x)}{-u} = -\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} = -f'(x)$$

$$\text{Άρα από την σχέση (I) έχουμε } \frac{1}{2} [f'(x) + f'(x)] = f'(x)$$

$\Gamma 2.$  Έστω  $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, a \neq 0$  η πολυωνυμική συνάρτηση 3<sup>ου</sup> βαθμού

Αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων ισχύει  $f(0) = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$

Επομένως  $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x$  και  $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma$

Ισχύει  $f(x) + f'(x) = x^3 + 3x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα για  $x = 0$  προκύπτει

$$f(0) + f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$$

Οπότε  $f(x) = ax^3 + \beta x^2$  και  $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x$

Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) + f'(x) = x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow \alpha x^3 + \beta x^2 + 3\alpha x^2 + 2\beta x = x^3 + 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha x^3 + (\beta + 3\alpha)x^2 + 2\beta x = x^3 + 3x^2$$

Για να ισχύει η τελευταία σχέση για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  πρέπει

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + 3\alpha = 3 \\ 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + 3\alpha = 3 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και } \beta = 0 \text{ συνεπώς } f(x) = x^3 \text{ με } A_f = \mathbb{R}$$

*Παρατήρηση: Η άσκηση μπορεί να λυθεί και χωρίς το δεδομένο ότι η  $f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων, ο λόγος που δόθηκε είναι για να είναι πιο απλό το σύστημα στην ισότητα των πολυωνύμων*

Ενναλακτική λύση

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) + f'(x) = x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) + (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) = x^3 + 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha x^3 + (\beta + 3\alpha)x^2 + (\gamma + 2\beta)x + \gamma + \delta = x^3 + 3x^2$$

Για να ισχύει η τελευταία σχέση για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  πρέπει

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + 3\alpha = 3 \\ \gamma + 2\beta = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \text{ άρα } f(x) = x^3 \text{ με } A_f = \mathbb{R}$$

### Γ3. Α τρόπος

(i) Θεωρούμε την συνάρτηση  $h(x) = 2x^3 + (x-1)^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Η  $h$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[0,1]$  ως πολυωνυμική

$h(0) = -1$  και  $h(1) = 2$  δηλαδή  $h(0) \cdot h(1) < 0$  άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιο ώστε  $h(x_0) = 0$

Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδικό.

Έστω  $x_1, x_2 \in [0,1]$  με  $x_1 < x_2$  τότε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow 2x_1^3 < 2x_2^3 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow (x_1 - 1)^3 < (x_2 - 1)^3 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει  $h(x_1) < h(x_2)$  άρα η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα επομένως και 1-1 άρα η ρίζα  $x_0$  είναι μοναδική .

### Β τρόπος

Η εξίσωση μπορεί να λυθεί και αλγεβρικά και να προσδιοριστεί η ρίζα απευθείας η οποία όπως φαίνεται παρακάτω ανήκει στο ανοικτό διάστημα (0,1)

$$2x^3 + (x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x})^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x} = 1-x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x} + x = 1 \Leftrightarrow x(\sqrt[3]{2} + 1) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}$$

ii) Θα λύσουμε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$

$$x^3 = \frac{1}{3x} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x^4 = 1 - 2x \Leftrightarrow 3x^4 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(3x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

Από την τελευταία προκύπτει  $x = -1$  και

$$3x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^3 + (x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0, \text{ η μοναδική ρίζα του ερωτήματος Γ3(i)}$$

### Εναλλακτικά

Σύμφωνα με τον Β τρόπο του ερωτήματος Γ3 (i) η εξίσωση έχει ρίζα την

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}$$

Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = 3x^2$  ενώ η  $g$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  με

$$g'(x) = -\frac{1}{3x^2}$$

Έχουμε

$$f'(-1) = 3 \text{ και } g'(-1) = -\frac{1}{3} \text{ δηλαδή } f'(-1) \cdot g'(-1) = -1$$

$$f'(x_0) = 3x_0^2 \text{ και } g'(x_0) = -\frac{1}{3x_0^2} \text{ δηλαδή } f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$$

Άρα οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων  $f$  και  $g$  στα κοινά τους σημεία τέμνονται κάθετα.

$$\begin{aligned} \Gamma 4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^3 + 1}{x^{v-1}} \cdot \eta\mu \frac{1}{x^3} \right] = 1 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^3 + 1}{x^{v-1}} \cdot \frac{x^3}{x^3} \eta\mu \frac{1}{x^3} \right] = 1 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^3 + 1}{x^{v+2}} \cdot \left( x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x^3} \right) \right] = 1 \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

Για το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x^3}$  θέτουμε  $u = \frac{1}{x^3}$  άρα  $x^3 = \frac{1}{u}$

Έχουμε  $u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+$  άρα  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x^3} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$

Για το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^{v+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^{v+2}}$  έχουμε τις εξής περιπτώσεις

- Αν  $3 > v + 2 \Leftrightarrow v < 1$  Άτοπο αφού  $v \in \mathbb{N}^*$
- Αν  $3 = v + 2 \Leftrightarrow v = 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^{1+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$  δεκτή διότι τότε ισχύει (I)
- Αν  $3 < v + 2 \Leftrightarrow v > 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^{v+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{v-1}} = 0$  Άτοπο αφού τότε το όριο είναι 0.

#### ΘΕΜΑ 4

##### Δ1.

(i) Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική με  $g'(x) = 6x^2 + 6x - 6f(0) \cdot f(1)$  και αφού δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη ισχύει  $g'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Άρα  $6x^2 + 6x - 6f(0) \cdot f(1) \neq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Για να ισχύει πρέπει  $\Delta < 0$

$$\text{Δηλαδή : } 36 + 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot f(0) \cdot f(1) < 0 \Leftrightarrow 6(1 + 4f(0) \cdot f(1)) < 0 \Leftrightarrow 1 + 4f(0) \cdot f(1) < 0$$

(ii) Για την  $f$  πρέπει  $x^2 + x - f(0) \cdot f(1) \neq 0$  το οποίο ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι  $1 + 4f(0) \cdot f(1) < 0$  άρα  $A_f = \mathbb{R}$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$  ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Ισχύει  $1 + 4f(0) \cdot f(1) < 0 \Leftrightarrow f(0) \cdot f(1) < -\frac{1}{4}$  άρα  $f(0) \cdot f(1) < 0$

Επομένως από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$

**Δ2.** Για να βρούμε το κοινό τους σημείο θα λύσουμε την εξίσωση

$$f_1(x) = f_2(x), x \in (0, +\infty)$$

Έχουμε  $e^x = \frac{\alpha}{x}, x > 0$

Από το Δ1 ισχύει  $f(x_0) = 0$  με  $x_0 \in (0,1)$

$$\text{Άρα } \frac{x_0 e^{x_0} - \alpha}{x_0^2 + x_0 - f(1)f(0)} = 0 \Leftrightarrow x_0 e^{x_0} - \alpha = 0 \Leftrightarrow x_0 e^{x_0} = \alpha \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{\alpha}{x_0}$$

Άρα οι συναρτήσεις  $f_1(x), f_2(x)$  έχουν κοινό σημείο το  $M(x_0, e^{x_0})$  ή  $M\left(x_0, \frac{\alpha}{x_0}\right)$

Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδικό

Έστω  $h(x) = e^x - \frac{\alpha}{x}, x > 0$

Για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \boxed{e^{x_1} < e^{x_2}} \quad (1)$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow \boxed{-\frac{\alpha}{x_1} < -\frac{\alpha}{x_2}} \quad (2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει  $h(x_1) < h(x_2)$  άρα η  $h$  γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$  οπότε και 1-1 άρα η ρίζα  $x_0$  είναι μοναδική .

Η κλίση της  $f_1$  στο σημείο  $M$  είναι  $f_1'(x_0) = e^{x_0}$

Ενώ η κλίση της  $f_2$  στο σημείο  $M$  είναι  $f_2'(x_0) = -\frac{\alpha}{x_0^2}$

Ισχύει  $f_1'(x_0) = e^{x_0} > 0$  ενώ  $f_2'(x_0) = -\frac{\alpha}{x_0^2} < 0$  άρα **δεν** έχουν κοινή εφαπτομένη στο  $M$ .

**Δ3.** Για το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{g(x)} - \alpha^{g(x)}}{e^{g(x)} + \alpha^{g(x)}}$ . Θέτουμε  $u = g(x)$

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 3x^2 - 6f(0) \cdot f(1)x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{g(x)} - \alpha^{g(x)}}{e^{g(x)} + \alpha^{g(x)}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u - \alpha^u}{e^u + \alpha^u}$ , γνωρίζουμε ότι  $\alpha < e$  άρα

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u - \alpha^u}{e^u + \alpha^u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{e}\right)^u}{1 + \left(\frac{\alpha}{e}\right)^u} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \quad \text{αφού} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^u = 0, \quad 0 < \frac{\alpha}{e} < 1$$

**Δ4.** Ισχύει  $g(0) \neq 0$  και  $g(1) = 5 - 6f(0)f(1)$  το οποίο είναι θετικό διότι

$$f(0) \cdot f(1) < -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -6f(0) \cdot f(1) > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 5 - 6f(0) \cdot f(1) > \frac{13}{2}$$

Άρα  $0 < 1$  και  $g(0) < g(1)$  οπότε με δεδομένο ότι η  $g$  είναι γνησίως μονότονη συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

$$g(f(x)) > 0 \Leftrightarrow g(f(x)) > g(0) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{xe^x - \alpha}{x^2 + x - f(0) \cdot f(1)} > 0$$

Το τριώνυμο  $x^2 + x - f(0) \cdot f(1)$  παίρνει μόνο θετικές τιμές διότι έχει διακρίνουσα αρνητική και ο συντελεστής του  $x^2$  είναι θετικός άρα ο αριθμητής πρέπει να είναι θετικός  $xe^x - \alpha > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(x_0) \Leftrightarrow x > x_0$

**Προφανώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα και με άλλους τρόπους.**



ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ (Ο.Ε.Φ.Ε.) – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025**  
Α΄ ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ3Θ0(α)**

ΕΚΚΕΝΤΡΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ  
ΜΕΣΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ