



ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Ιανουαρίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 71 σχολικού βιβλίου.

Α2. Γιατί μετά από το σημείο αυτό: $(5-x)(x+1) = (3+x)(x+1)$ έγινε διαίρεση με την ποσότητα $x+1$ που δεν ξέρουμε, ούτε μας δίνεται ότι είναι διάφορη του μηδενός με αποτέλεσμα να χάσουμε μια λύση την $x = -1$.

- Α3. α) Λάθος
β) Λάθος
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $3|x+2| - 6 = 0 \Leftrightarrow 3|x+2| = 6 \Leftrightarrow |x+2| = 2 \Leftrightarrow$

$x+2 = 2 \text{ ή } x+2 = -2 \Leftrightarrow$

$x = 0 \text{ ή } x = -4.$

Β2. $|3x-1| - |x-1| = 0 \Leftrightarrow |3x-1| = |x-1| \Leftrightarrow$

$3x-1 = x-1 \text{ ή } 3x-1 = -(x-1) \Leftrightarrow$

$2x = 0 \text{ ή } 3x-1 = -x+1 \Leftrightarrow$

$x = 0 \text{ ή } 4x = 2 \Leftrightarrow$

$$x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{B3. } x^5 - 4x^3 - x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 - 4) - (x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 4)(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4 = 0 \text{ ή } x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 4 \quad \text{ή} \quad x^3 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \pm 2 \quad \text{ή} \quad x = 1.$$

$$\text{B4. } \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε x με:

- $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$
- $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$
- $(x - 2)(x - 3) \neq 0 \Leftrightarrow x - 2 \neq 0$ και $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x \neq 3$

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \text{ το ΕΚΠ} = (x-2)(x-3), \text{ άρα}$$

$$(x-2)(x-3) \cdot \frac{x}{(x-2)(x-3)} = (x-2)(x-3) \cdot \frac{1}{x-2} + (x-2)(x-3) \cdot \frac{1}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow x = x - 3 + x - 2 \Leftrightarrow -x = -5 \Leftrightarrow x = 5 \text{ Δεκτή.}$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\text{Γ1. Έχουμε: } \alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 6\beta + 13 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 + \beta^2 - 6\beta + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 2)^2 + (\beta - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - 2 = 0 \text{ και } \beta - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 2 \quad \text{και} \quad \beta = 3.$$

Γ2. Έχουμε:

$$A = \frac{2\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}^2 - \sqrt{3}^2 - \sqrt{6}}{\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{2\sqrt{6} + 2 \cdot 2 - 3 - \sqrt{6}}{3 - 2} = \sqrt{6} + 1.$$

$$B = \frac{3(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})}{\sqrt{\beta}} = \frac{3(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3(\sqrt{3}^2 - \sqrt{6})}{\sqrt{3}^2} = \frac{3(3 - \sqrt{6})}{3} = 3 - \sqrt{6}.$$

Γ3. Έχουμε:

$$A^2 = (\sqrt{6} + 1)^2 = \sqrt{6}^2 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot 1 + 1^2 = 6 + 2\sqrt{6} + 1 = 7 + 2\sqrt{6}.$$

$$B^2 = (3 - \sqrt{6})^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{6} + \sqrt{6}^2 = 9 - 6\sqrt{6} + 6 = 15 - 6\sqrt{6}.$$

Γ4. Έχουμε:

$$\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = \sqrt{4 \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{4}}$$

$$\sqrt{(\sqrt{6} + 1)^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{6})^2} = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow$$

$$|\sqrt{6} + 1| + |3 - \sqrt{6}| = 4^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \quad (1).$$

Το $\sqrt{6} + 1 > 0$ οπότε το $|\sqrt{6} + 1| = \sqrt{6} + 1$.

Το $3 - \sqrt{6} > 0$ οπότε το $|3 - \sqrt{6}| = 3 - \sqrt{6}$.

Η (1) γίνεται: $\sqrt{6} + 1 + 3 - \sqrt{6} = 4^{\frac{6}{6}} \Leftrightarrow 4 = 4$ το οποίο ισχύει.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε: $\Pi = 2(\lambda + 2) + 2(\lambda + 1) = 2\lambda + 4 + 2\lambda + 2 = 4\lambda + 6$.

$$1 \leq \lambda \leq 5 \Leftrightarrow 4 \leq 4\lambda \leq 20 \Leftrightarrow 4 + 6 \leq 4\lambda + 6 \leq 20 + 6 \Leftrightarrow 10 \leq \Pi \leq 26.$$

Ιος τρόπος:

$$E = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq \lambda \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq \lambda + 1 \leq 6 \\ 1 \leq \lambda \leq 5 \Leftrightarrow 3 \leq \lambda + 2 \leq 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(*)} \\ \text{όλα θετικά} \end{array} \Rightarrow 6 \leq (\lambda + 1)(\lambda + 2) \leq 42 \Leftrightarrow 6 \leq E \leq 42$$

2ος τρόπος:

$$E = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq \lambda \leq 5 \\ 1 \leq \lambda \leq 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(*)} \\ \text{όλα θετικά} \end{array} \Rightarrow 1 \leq \lambda^2 \leq 25 \quad (1)$$

$$1 \leq \lambda \leq 5 \xrightarrow{\cdot 3 > 0} 3 \leq 3\lambda \leq 15 \xrightarrow{+2} 5 \leq 3\lambda + 2 \leq 17 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \text{ έχουμε: } 1 + 5 \leq \lambda^2 + 3\lambda + 2 \leq 25 + 17 \Leftrightarrow 6 \leq E \leq 42$$

Δ2. Η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα όταν:

$$3\lambda - 6 = 0 \text{ και } \mu^2 - 3\mu = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\lambda = 6 \text{ και } \mu(\mu - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 2 \text{ και } \mu = 0 \text{ ή } \mu - 3 = 0 \quad (3) \Leftrightarrow$$

$$\mu = 3.$$

Η εξίσωση (2) είναι αδύνατη όταν:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \text{ και } \mu + 2 - \lambda \neq 0$$

$$\lambda - 1 = 0 \text{ ή } \lambda - 2 = 0 \text{ και } \mu \neq \lambda - 2 \quad (4) \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 2.$$

Η κοινή λύση του λ είναι το 2. Άρα $\lambda = 2$ οπότε η (4) $\Leftrightarrow \mu \neq 2 - 2 \Leftrightarrow \mu \neq 0$ οπότε από την (3) έχουμε ότι: $\mu = 3$.

Δ3. i) Έχουμε: $d(x, 2) \cdot d(x, 3) = d(x, 2) \Leftrightarrow |x - 2| \cdot |x - 3| = |x - 2| \Leftrightarrow$

$$|x - 2| \cdot |x - 3| - |x - 2| = 0 \Leftrightarrow |x - 2| \cdot (|x - 3| - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$|x - 2| = 0 \text{ ή } |x - 3| - 1 = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ ή } |x - 3| = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \text{ ή } x - 3 = 1 \text{ ή } x - 3 = -1 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 + 1 \text{ ή } x = 3 - 1 \Leftrightarrow$$

$$x=4 \quad \text{ή} \quad x=2.$$

$$\text{ii) } |3|x|-2|=4 \Leftrightarrow 3|x|-2=4 \quad \text{ή} \quad 3|x|-2=-4 \Leftrightarrow$$

$$3|x|-2=4 \quad \text{ή} \quad 3|x|-2=-4 \Leftrightarrow$$

$$3|x|=2+4 \quad \text{ή} \quad 3|x|=2-4 \Leftrightarrow$$

$$3|x|=6 \quad \text{ή} \quad 3|x|=-2 \Leftrightarrow$$

$$|x|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \quad \text{ή} \quad |x|=-\frac{2}{3} < 0 \text{ Αδύνατη}$$

$$x=\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x=-\frac{1}{2}$$

ΕΚΚΕΝΤΡΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΜΕΣΗΚ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ