ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 194

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 188

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 259

Α4. **α)** ΛΑΘΟΣ
β) ΣΩΣΤΟ
γ) ΛΑΘΟΣ
δ) ΣΩΣΤΟ
ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1)$

$z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 \Leftrightarrow z\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} + 4$

$\Leftrightarrow 3z\bar{z} = 12 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2.

Β2. **α)** Αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{w} = w$.

Έχουμε $\overline{w} = \overline{\left(\dfrac{2z_1}{z_2} + \dfrac{2z_2}{z_1}\right)} = 2\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + 2\dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = 2\dfrac{\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + 2\dfrac{\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} =$

$2\dfrac{z_2}{z_1} + 2\dfrac{z_1}{z_2} = w$.

Άρα ο w είναι πραγματικός.

β) $|w| = \left|2\dfrac{z_1}{z_2} + 2\dfrac{z_2}{z_1}\right| \le 2\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| + 2\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|$

$|w| \le 2\dfrac{|z_1|}{|z_2|} + 2\dfrac{|z_2|}{|z_1|} \Leftrightarrow |w| \le 2 + 2 \Leftrightarrow |w| \le 4$

Και επειδή $w \in \mathbb{R}$

$-4 \le w \le 4$.

Β3. Αν $w = -4$

$2\dfrac{z_2}{z_1} + 2\dfrac{z_1}{z_2} = -4 \Leftrightarrow \dfrac{z_2}{z_1} + \dfrac{z_1}{z_2} = -2 \Leftrightarrow$

$z_2^2 + z_1^2 = -2z_1 \Leftrightarrow z_1^2 + 2z_1z_2 + z_1^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_1$

$A\Gamma = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1-2i)| = |z_1| \cdot |1-2i| =$

$= 4\sqrt{1^2 + 2^2} = 4\sqrt{5}$

$B\Gamma = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |-z_1(1+2i)| = |z_1| \cdot |1+2i| = 4\sqrt{5}$

Άρα ΑΓ=ΒΓ.

Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $$f'(x)=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-e^x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Αφού $\left(x-1\right)^2\geq 0$, $\left(x^2+1\right)^2>0,\ e^x>0\ \forall x\in A_f$ και f συνεχής στο $x_o=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+		+
f	$\nearrow$		$\nearrow$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Στο $$\left.\begin{matrix}A_1=\left(-\infty,1\right]\\ f\nearrow A_1,\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow f\left(A_1\right)=\left(0,\frac{e}{2}\right]$$

$$\left.\begin{matrix}A_2=\left[1,+\infty\right)\\ f\nearrow A_2,\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow f\left(A_2\right)=\left[\frac{e}{2},+\infty\right)$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f\left(A\right)=f\left(A_1\right)\cup f\left(A_2\right)=\left(0,+\infty\right)$.

Γ2. $$f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right)=f\left(2\right)\overset{f\nearrow}{\Longleftrightarrow}e^{3-x}\left(x^2+1\right)=2$$

$$\Leftrightarrow\frac{e^3}{e^x}\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{e^x}=\frac{2}{e^3}\Leftrightarrow\frac{e^x}{x^2+1}=\frac{e^3}{2}\Leftrightarrow f\left(x\right)=\frac{e^3}{2}$$

Αφού το $\frac{e^3}{2}\in f\left(A\right)$, από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα και αφού f γνησίως αύξουσα η ρίζα είναι μοναδική.

Γ3. Η προς απόδειξη σχέση γίνεται:

$$\int_{2x}^{a}f\left(t\right)dt+\int_{a}^{4x}f\left(t\right)dt<2x\cdot f\left(4x\right)\overset{:2x>0}{\Leftrightarrow}\frac{\int_{a}^{4x}f\left(t\right)dt-\int_{a}^{2x}f\left(t\right)dt}{2x}<\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}}f\left(4x\right)$$

$$\frac{\int_{a}^{4x}f\left(t\right)dt-\int_{a}^{2x}f\left(t\right)dt}{2x}<f\left(4x\right)=\mathrm{K}'\left(4x\right)\ \textbf{(1)}$$

Έστω η $\mathrm{K}(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, με f συνεχής. Άρα η Κ είναι παραγωγίσιμη.

Εφόσον x>0, $2x<4x$ και από Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[2x,4x]\,\exists\,\xi\in(2x,4x)$ ώστε $K'(\xi)=\dfrac{\int_a^{4x} f(t)\,dt-\int_a^{2x} f(t)\,dt}{2x}\Leftrightarrow K'(\xi)=f(\xi)$.

Με $K'(x)=f(x)>0\Leftrightarrow K''(x)=f'(x)>0$ (από ερώτημα **Γ₁**). Άρα K' είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως $\xi<4x \overset{K'\uparrow}{\Longleftrightarrow} \mathrm{K}'(\xi)<\mathrm{K}'(4x)$, που είναι η ζητούμενη.

Γ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ γιατί η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

$2x,4x>0,\ a>0$ με $g(x)=\dfrac{\int_{2x}^{a} f(t)\,dt+\int_a^{4x} f(t)\,dt}{x}=\dfrac{\int_a^{4x} f(t)\,dt-\int_a^{2x} f(t)\,dt}{x}$

Άρα

$$g'(x)=\frac{\left[f(4x)\cdot 4-f(2x)\cdot 2\right]x-\left(\int_a^{4x} f(t)\,dt-\int_a^{2x} f(t)\,dt\right)}{x^2}=\frac{f(4x)\cdot 4x-f(2x)\cdot 2x-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2}$$

$$=\frac{\left[2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt\right]+\left[2xf(4x)-2xf(2x)\right]}{x^2}=\frac{\left[2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt\right]+2x\left[f(4x)-f(2x)\right]}{x^2}>0$$

Λόγω του ερωτήματος **Γ₃**

$2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt>0$ & $2x\left[f(4x)-f(2x)\right]>0$ γιατί x>0 και καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f(4x)>f(2x)\Leftrightarrow f(4x)-f(2x)>0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Θα δείξουμε ότι η g είναι συνεχής στο $x_o=0$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\left[4f(4x)-2f(2x)\right]\overset{(*)}{=}$

$= 4f(0) - 2f(0) = 2f(0) = 2\cdot 1 = 2 = g(0)$

Άρα η g είναι συνεχής στο $x_o = 0$. Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

(*) Η συνάρτηση $\left[4f(4x) - 2f(2x)\right]$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

$$f'(x)\cdot e^{f(x)} + e^{-f(x)}\cdot f'(x) = 2$$
$$f'(x)\cdot e^{f(x)} - 2 = -f'(x)\cdot e^{-f(x)}$$
$$\left(e^{f(x)} - 2x\right)' = \left(e^{-f(x)}\right)'$$
$$e^{f(x)} - 2x = e^{-f(x)} + c \qquad (1)$$

Για $x = 0$

$e^0 - 0 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0.$

Άρα η (1) γίνεται:

$$e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = 1 + x^2$$
$$\left(e^{f(x)} - x\right)^2 = 1 + x^2$$
$$\left|e^{f(x)} - x\right| = \sqrt{1+x^2} \neq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Θέτω $g(x) = e^{f(x)} - x \neq 0.$ Αφού η g είναι συνεχής και $g(x) \neq 0$, τότε διατηρεί πρόσημο.

Όμως $g(0) = 1 > 0$. Άρα $g(x) > 0$.

$$e^{f(x)} - x = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{1+x^2}$$
$$\underset{\text{"1–1"}}{\overset{\ln x}{\Leftrightarrow}} f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Δ2.

α) $f'(x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

$$f''(x)=\frac{-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=-\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$$

$f''(x)\le 0 \Leftrightarrow -x\le 0 \Leftrightarrow x\ge 0$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$ 0	0 $+\infty$
f''	+	-
f		

Σ.Κ.

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_o=0$ και η καμπή είναι το $f(0)=0$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $(0,f(0))$ είναι:

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

$f(0)=0$ και $f'(0)=1$

Οπότε $y=x$.

Άρα η f είναι κοίλη για κάθε $x\ge 0$.

Επομένως ισχύει $f(x)\le x$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα

$$E(\Omega)=\int_0^1\left|f(x)-x\right|dx=\int_0^1\left(x-f(x)\right)dx=\int_0^1\left[x-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=I_1-I_2\,.$$

$$I_1=\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1=\frac{1}{2} \qquad\qquad I_2=\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

$$\int_0^1 (x)'\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=\left[x\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1-\int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\int_0^1\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}dx=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=$$

$$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}+1 \qquad \text{τ.μ.}$$

Δ3. $x>0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\int_0^x f^2(t)dt-0}\cdot\int_0^x f^2(t)dt\cdot\ln\left|f(x)\right|.$$

Θέτω $\int_0^x f^2(t)dt=u$, $\quad \lim_{x\to 0}\int_0^x f^2(t)dt=0$

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\left(e^u-1\right)'}{(u)'}=\lim_{u\to 0}e^u=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\int_0^x f^2(t)dt}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x f^2(t)dt\cdot\ln\left|f(x)\right|=$$

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x f^2(t)dt\cdot\ln\left|f(x)\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left|f(x)\right|}{\frac{1}{\int_0^x f^2(t)dt}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\left|f(x)\right|\right)'}{\left(\frac{1}{\int_0^x f^2(t)dt}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)}{-\frac{1}{\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)^2}\cdot 2f(x)\cdot f'(x)}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f^2(t)\,dt\right)^2}{2f^2(x)} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} -\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f^2(t)\,dt\cdot f^2(x)}{2\cdot 2\cdot f(x)\cdot f'(x)} = -\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f^2(t)\,dt}{2\cdot f'(x)} = 0$$

Άρα $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\int_0^x f^2(t)\,dt}\cdot\int_0^x f^2(t)\cdot\ln|f(x)| = 0$.

Δ4. Θεωρώ $K(x)=(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)\,dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t)\,dt\right)$

Επειδή $f(t)$ συνεχής τότε οι $f^2(t)$ & $f(t^2)$ συνεχείς ως σύνθεση συνεχών, άρα η K παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[2,3]$.

$K(2)=3\int_0^2 f^2(t)\,dt-8<0$

Αιτιολόγηση:

Η f είναι κοίλη, τότε η εφαπτομένη της $y=x$ είναι πάνω από την C_f.

Άρα $f(t)\le t$. Επειδή $f(t)>0$, έχουμε

$f^2(t)\le t^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t)\,dt<\int_0^2 t^2 dt \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t)\,dt\le\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 \Leftrightarrow$.

$\int_0^2 f^2(t)\,dt<\frac{8}{3}\Leftrightarrow 3\int_0^2 f^2(t)\,dt-8<0$

$K(3)=1-3\int_0^1 f(t^2)\,dt>0$

Αιτιολόγηση:

$f(t)\le t\Leftrightarrow f(t)\le t$

$f(t^2)\le t^2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2)\,dt<\int_0^1 t^2 dt \Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2)\,dt<\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2)\,dt\le\frac{1}{3}$

Άρα $K(2)\cdot K(3)<0$. Επομένως από θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(2,3): K(x_o)=0$