



**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

A1. Βλέπε απόδειξη Σελ. 262, σχολικού βιβλίου

A2. Βλέπε ορισμό Σελ. 141, σχολικού βιβλίου

A2. Βλέπε διατύπωση θεωρήματος Σελ. 246 και γεωμετρική ερμηνεία Σελ. 247 σχολικού βιβλίου

A4.

α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x^2+1) - (x^2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Το πρόσημο της f' φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	—		+
f			

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση 0 ίσο με $f(0) = 0$.

B2. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = \frac{(2x)'(x^2+1)^2 - (2x)((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)^2 - 2 \cdot x \cdot 2(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4} =$$
$$\frac{2(x^2+1)^2 - 4x(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^3} = \frac{-6x^2 + 2}{(x^2+1)^3} = \frac{2(-3x^2 + 1)}{(x^2+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(-3x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

Λύνουμε την εξίσωση,

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

X	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f''		—	+	—
f				

Επομένως η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. Τα σημεία καμπής της συνάρτησης είναι τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

B3.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Θα μελετήσουμε αν η f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

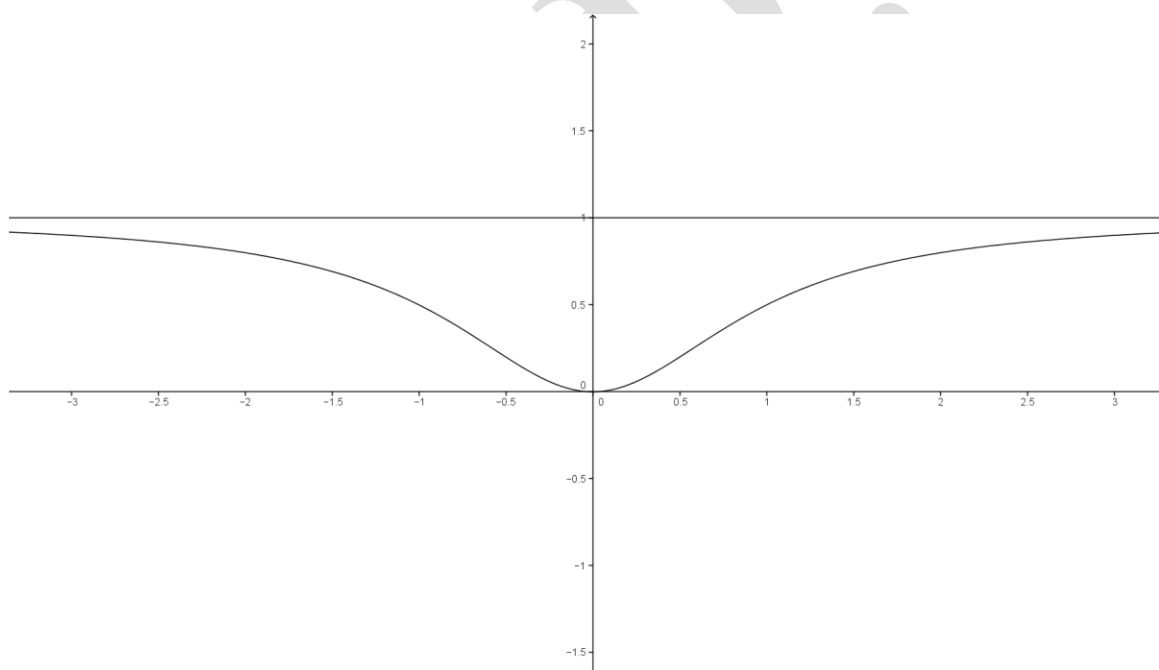
Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$. Επομένως η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=1$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$. Επομένως η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y=1$.

B4. Φτιάχνουμε τον πίνακα μεταβολών της f

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f''	$-$	$\bigcirc$	$-$	$\bigcirc$	$+$
f	$-$	$+$	$+$	$-$	
f					

Με βάση τις απαντήσεις στα ερωτήματα B1,B2,B3 η γραφική παράσταση της f είναι



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2e^{x^2}x - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$.

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $e^{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Είναι $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε $e^{x^2} \geq e^0 = 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0$

Άρα το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του $2x$ και φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Επειδή η f έχει ολικό ελάχιστο στο 0 , το $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το $x_0 = 0$.

Γ2.

Από τη σχέση $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$ έχουμε ισοδύναμα $|f(x)| = |e^{x^2} - x^2 - 1|$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και δε μηδενίζεται σε αυτό, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επομένως

Αν $x \in (-\infty, 0)$ και $f(x) < 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι

$$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$$

Αν $x \in (-\infty, 0)$ και $f(x) > 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι

$$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και δε μηδενίζεται σε αυτό, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επομένως,

Αν $x \in (0, +\infty)$ και $f(x) < 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι

$$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$$

Αν $x \in (0, +\infty)$ και $f(x) > 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι

$$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$$

Συνεπώς προκύπτουν οι εξής συνδυασμοί για τον τύπο της f

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1), x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} -e^{x^2} + x^2 + 1, & x < 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ3.

Από το Γ1 παραγωγίζοντας τη πρώτη παράγωγο της f έχουμε

$$f''(x) = 4e^{x^2}x^2 + 2e^{x^2} - 2, x \in \mathbb{R}$$

Ισχύει ότι

$$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow 2e^{x^2} \geq 2 \Leftrightarrow 2e^{x^2} - 2 \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{και } 4e^{x^2}x^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε από (1) + (2) προκύπτει } 4e^{x^2}x^2 + 2e^{x^2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$, οπότε η f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4.

Για την εξίσωση $f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$ (1)

Θεωρούμε συνάρτηση g με $g(x)=f(x+3)-f(x)$ στο $[0,+\infty)$

Η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,+\infty)$,

$$\text{με } g'(x)=f'(x+3)\cdot(x+3)'-f'(x)=f'(x+3)-f'(x)$$

Για τη μονοτονία της f' έχουμε ότι για

$$x < x+3 \stackrel{f' \nearrow [0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x+3) \Leftrightarrow f'(x+3)-f'(x) > 0$$

οπότε $g'(x) > 0$ και συνεπώς η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση άρα και “1-1” οπότε η εξίσωση (1) γράφεται:

$$g(|\eta\mu x|)=g(x) \stackrel{g \text{ "1-1" }}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x|=x \Leftrightarrow x=0$$

Αφού από τη θεωρία έχουμε ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$ και για $x \geq 0$ ισχύει $|\eta\mu x| \leq x$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από τη σχέση $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = \pi$ ισοδύναμα έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx + \int_0^{\pi} f''(x) \eta \mu x dx &= \pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx + \int_0^{\pi} (f'(x))' \eta \mu x dx = \pi \Leftrightarrow \\ \int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx + [f'(x) \eta \mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) (\eta \mu x)' dx &= \pi \Leftrightarrow \\ \int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx + [f'(\pi) \eta \mu \pi - f'(0) \eta \mu 0]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \sigma \upsilon \nu x dx &= \pi \Leftrightarrow \\ \int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx - [f(\pi) \sigma \upsilon \nu \pi - f(0) \sigma \upsilon \nu 0]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x) (\sigma \upsilon \nu x)' dx &= \pi \Leftrightarrow \\ \int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx + f(\pi) - f(0) - \int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx &= \pi \Leftrightarrow \\ f(\pi) - f(0) &= \pi \quad (1) \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x = 0$.

$$\text{ΟΠΟΤΕ } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad (2)$$

Από τη δεδομένη σχέση $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x} = 1$, θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)}{\eta \mu x}$ με

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1. \text{ ΟΠΟΤΕ } f(x) = g(x) \cdot \eta \mu x \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) \cdot \eta \mu x) = 1 \cdot 0$$

όπου λόγω της (2) έχουμε $f(0) = 0$ (3).

Από τις σχέσεις (1) και (2) και (3) παίρνουμε τελικά $f(\pi) = \pi$

Για το $f'(0)$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\eta \mu x} \cdot \frac{\eta \mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\eta \mu x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

Άρα $f'(0) = 1$

Δ 2α.

Παραγωγίζοντας τη σχέση $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η οποία αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις

έχουμε

$$e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x \quad (1)$$

Έστω ότι η f έχει ακρότατο στη θέση $x_0 \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$,

από το Θεώρημα Fermat έχουμε $f'(x_0) = 0$ (2).

Οπότε η σχέση (1) για $x = x_0$ γίνεται

$$e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow 1 = e^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Οπότε $f'(0) = 0$ ΑΤΟΠΟ, αφού $f'(0) = 1$

Άρα η f δεν έχει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

Δ 2β.

Επειδή

- $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (από Δ2α) και
- η f' είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αφού η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

επομένως η f' θα διατηρεί το πρόσημο της. Επιπλέον $f'(0) = 1 > 0$,
άρα $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Δ3. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty). \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Ισχύει ότι $|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| \leq |\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| \leq 1 + 1 = 2$

$$\text{Άρα } \left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| \leq \frac{2}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\frac{2}{|f(x)|} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{|f(x)|}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{|f(x)|} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{|f(x)|} \right)$. Άρα από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$$

Δ4. Για το $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx$ θέτουμε $\ln x = u$. Άρα $\frac{1}{x} dx = du$.

Για $x=1$ είναι $u = \ln 1 = 0$ ενώ,

για $x = e^\pi$ είναι $u = \ln e^\pi = \pi$,

οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi f(u) du = \int_1^\pi f(x) dx$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και γνησίως αύξουσα άρα

$$f(0) \leq f(x) \leq f(\pi) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \pi.$$

Άρα $f(x) \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, οπότε $\int_0^\pi f(x) dx > 0$ (1).

Επίσης $\pi - f(x) \geq 0$ και η συνάρτηση $\pi - f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και δεν μηδενίζεται παντού, αλλά μόνο στο $x=\pi$.

$$\text{Άρα } \int_0^\pi (\pi - f(x)) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi \pi > \int_0^\pi f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) dx < \pi(\pi - 0) = \pi^2 \quad (2).$$

Επομένως από (1),(2) προκύπτει $0 < \int_0^\pi f(x) dx < \pi^2$.