ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία από το Σχολικό Βιβλίο σελ 135.

Α2.

1. Λ
2. Λ
3. Λ
4. Σ
5. Σ

Α3.

Α → 4
Β → 2
Γ → 1
Δ → 5
Ε → 3

ΘΕΜΑ Β'
Β1.

$$\varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x$$

$$\sigma\upsilon\nu(2\pi + x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\upsilon\nu(\frac{9\pi}{2} + x) = \sigma\upsilon\nu(4\pi + \frac{\pi}{2} + x) = -\eta\mu x$$

$$\eta\mu(13\pi + x) = \eta\mu(12\pi + \pi + x) = -\eta\mu x$$

$$συν(-x) = συνx$$

$$σφ\left(\frac{21π}{2} + x\right) = σφ(10π + \frac{π}{2} + x) = -εφx$$

$$A = \frac{(-εφx) \cdot συνx \cdot (-ημx)}{(-ημx) \cdot συνx \cdot (-εφx)} = 1$$

Β2.

$f(x) = 6ημ2x$

αφού $-1 \leq ημ2x \leq 1$

$-6 \leq 6ημ2x \leq 6$

Μέγιστη Τιμή: 6

Περίοδος: $T = \frac{2π}{2} = π$

Β3.

$f(x) = 3$

$6ημ2x = 3$

$ημ2x = \frac{1}{2}$

$ημ2x = ημ\frac{π}{6}$

$2x = 2κπ + \frac{π}{6}$ή $2x = 2κπ + π - \frac{π}{6}$

$x = κπ + \frac{π}{12}$ή $x = κπ + \frac{5π}{12}$ $κ \in \mathbb{Z}$

$x \in [-π, π]$	$x \in [-π, π]$
$-π \leq κπ + \frac{π}{12} \leq π$	$-π \leq κπ + \frac{5π}{12} \leq π$

$-\frac{13\pi}{12} \le \kappa\pi \le \frac{11\pi}{12}$	$-\frac{17\pi}{12} \le \kappa\pi \le \frac{7\pi}{12}$
$-\frac{13}{12} \le \kappa \le \frac{11}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}$	$-\frac{17}{12} \le \kappa \le \frac{7}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}$
$\kappa = -1$ ή $\kappa = 0$	$\kappa = -1$ ή $\kappa = 0$
$\kappa = -1\ \tau ó\tau\varepsilon\ x = -\frac{11\pi}{12}$	$\kappa = -1\ \tau ó\tau\varepsilon\ x = -\frac{7\pi}{12}$
$\kappa = 0\ \tau ó\tau\varepsilon\ x = \frac{\pi}{12}$	$\kappa = 0\ \tau ó\tau\varepsilon\ x = \frac{5\pi}{12}$

Β4.

$$(1 + \eta\mu x)(2 + 2\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x)(6\eta\mu 2x + 6\sigma\upsilon\nu 2x) = 0$$

Τότε 1+ημx = 0

$$\eta\mu x = -1$$

$$\eta\mu x = \eta\mu\frac{3\pi}{2}$$

$x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$ **ή** $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

ή $\tau o\ 2 + 2\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$

$$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{4})$$

$$x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4},\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ή το $6\eta\mu 2x + 6\sigma\upsilon\nu 2x = 0$

$$6\eta\mu 2x = -6\sigma\upsilon\nu 2x$$

$$\eta\mu 2x = \eta\mu(\frac{3\pi}{2} - 2x)$$

$2x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} - 2x$ ή $2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{3\pi}{2} + 2x$: αδύνατη

$x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ $,\kappa \in \mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ Γ'
Γ1.

<u>Α' ΤΡΟΠΟΣ</u>

Έστω $y = \alpha x + \beta$
Το σημείο Α(0,6) ανήκει στην ευθεία άρα 6 = β

Το σημείο Β(-2,0) ανήκει στην ευθεία οπότε
$$0 = -2a + 6$$
$$a = 3$$

<u>Β' ΤΡΟΠΟΣ</u>

Χρησιμοποιώ τον τύπο:
$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-6}{-2-0} = 3$$

και η εξίσωση θα είναι:
$$y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$$
$$y - 0 = 3(x + 2)$$
$$y = 3x + 6$$

Γ2. Λύνω την εξίσωση $f(x) = y$

$$x^4 - x^3 + x^2 = 3x + 6$$
$$x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 = 0$$

1	-1	1	-3	-6	2
↓	2	2	6	6	
1	1	3	3	0	

$(x-2)\cdot(x^3+x^2+3x+3)=0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ \downarrow & -1 & 0 & -3 & \\ 1 & 0 & 3 & 0 & \end{array}$$

$(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x^2+3)=0$
$x=2$ ή $x=-1$ ή $x^2=-3$ $αδύνατη$

Για $x=2$, $y=12$ $και$ για $x=-1$, $y=-9$
Επομένως τα σημεία τομής είναι τα $A(2,12)$ $B(-1,3)$

Γ3. Για να ορίζεται η $h(x)$αρκεί $f(x)>3x+6$

<u>1ος Τρόπος Αλγεβρικά</u>

Γνωρίζω ότι: $f(x)-y=(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x^2+3)$

	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
x-2	-		-	0	+
x+1	-	0	+		+
x^2+3	+		+		+
γινόμενο	+	0	-	0	+

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι:
$A=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

<u>2ος Τρόπος Γραφικά</u>

Παρατηρώ από το σχήμα ότι η Cf είναι "πάνω" από την ευθεία (ε) όταν $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ αρα Α= $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

Γ4. **i)** Το υπόλοιπο της διαίρεσης

$f(x):(x-1) είναι\ υ = f(1)$ και $Q(x):(x-1) είναι\ υ = Q(1)$

Άρα,

$$f(1) = Q(1)$$
$$1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + a$$
$$a = 1$$

ii) $\frac{x^4-x^3+x^2}{-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^4 - x^3 + x^2)(-\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} + 1) \geq 0$ (1)

$πρέπει\ -\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} + 1 = \frac{-x^4 + x^2 + 2}{2} \neq 0 \Leftrightarrow$
$\frac{1 - x^4 + x^2 + 1}{2} \neq 0$

Άρα $(1-x^2)(1+x^2) + x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (2-x^2)(1+x^2) \neq 0$

Οπότε $1 + x^2 \neq 0$ που ισχύει για κάθε x$\in R$ και $2 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$

Επίσης

$x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x^2 - x + 1)$

Άρα η (1) γίνεται: $x^2(x^2 - x + 1)\ \frac{(1+x^2)(2-x^2)}{2} \geq 0$

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x^2 - x + 1 = 0$, Δ<0 άρα αδύνατη.

	$-\infty$ $-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$ 0	0 $+\sqrt{2}$	$+\sqrt{2}$ $+\infty$
x^2	+	+	+	+
$x^2 - x + 1$	+	+	+	+
$x^2 + 1$	+	+	+	+
$2 - x^2$	-	+	+	-
Γινόμενο	-	+	+	-

Άρα, $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει $e^x + 3 - 4e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x + 3 - \frac{4}{e^x} > 0$

$$\frac{e^{2x} + 3e^x - 4}{e^x} > 0$$

Επειδή $e^x > 0$, για κάθε $x \in$ R, τότε $e^{2x} + 3e^x - 4 > 0$

Θέτω $e^x = \omega, \omega > 0$, άρα έχουμε $\omega^2 + 3\omega - 4 > 0$.
Οι ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $\omega^2 + 3\omega - 4 = 0$ είναι
$\omega_1 = -4 \; και \; \omega_2 = 1$.

$-\infty$		-4		1		$+\infty$
	+	0	-	0	+	

Άρα $\omega < -4 \; απορρίπτεται$, $\omega > 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

Άρα $Af = (0, +\infty)$

Δ2. $f(x) = \ln(e^x + 3 - 4e^{-x}) = \ln\left(e^x + 3 - \frac{4}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^{2x}+3e^x-4}{e^x}\right) =$
$\ln(e^{2x} + 3e^x - 4) - lne^x = \ln(e^{2x} + 3e^x - 4) - x \, , x > 0$

Δ3. $f(x) \leq x$, για $x > 0$ (1) έχουμε :

$$\ln(e^{2x} + 3e^x - 4) - x \leq x \Leftrightarrow$$
$$\ln(e^{2x} + 3e^x - 4) \leq 2x \Leftrightarrow$$
$$\ln(e^{2x} + 3e^x - 4) \leq lne^{2x} \Leftrightarrow$$
$$e^{2x} + 3e^x - 4 \leq e^{2x} \Leftrightarrow$$

$3e^x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow x \leq ln\frac{4}{3}$ (2)
$(\frac{4}{3} > 1 \Leftrightarrow ln\frac{4}{3} > 0)$
Από (1) και (2) έχουμε $0 < x \leq ln\frac{4}{3}$

Δ4.

- $f(ln2) = \ln\left(e^{ln2} + 3 - \frac{4}{e^{ln2}}\right) = \ln\left(2 + 3 - \frac{4}{2}\right) = ln3$
- $f(ln3) = \ln\left(e^{ln3} + 3 - \frac{4}{e^{ln3}}\right) = \ln\left(3 + 3 - \frac{4}{3}\right) = ln\frac{14}{3}$

Επειδή $\frac{14}{3} > 3 \overset{lnx\nearrow}{\Longleftrightarrow} ln\frac{14}{3} > ln3 \Leftrightarrow$

$$f(ln2) - f(ln3) < 0$$